УДК 530.12

В. Н. БАРЫКИН, Е. А. ТОЛКАЧЕВ, Л. М. ТОМИЛЬЧИК

О СИММЕТРИЙНЫХ АСПЕКТАХ ВЫБОРА МАТЕРИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

Известно [1, 2], что система дифференциальных уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\rho\tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho \tag{1}$$

совместно со следующей взаимосвязью напряженностей **E**, **H** и индукций **D**, **B** в среде

$$\mathbf{D} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{H}\right] = \varepsilon\left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B}\right]\right),$$
$$\mathbf{B} + \left[\mathbf{E}, \frac{\mathbf{u}}{c}\right] = \mu\left(\mathbf{H} + \left[\mathbf{D}, \frac{\mathbf{u}}{c}\right]\right), \tag{2}$$

где ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно; $\mathbf{u}$ — скорость движения среды, инвариантна относительно преобразований Лоренца L_c.

В ряде задач макроскопической электродинамики (обычно для бесконечной и недиспергирующей среды) удобно постулировать следующие материальные уравнения:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{3}$$

Уравнения (3) совместно с полевыми уравнениями (1) образуют систему, инвариантную относительно преобразований $L_{\tilde{c}}$, изоморфных группе Лоренца с заменой скорости света в вакууме c на величину $\tilde{c} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ [3]. Такие преобразования могут, например, быть получены из требования инвариантности диагонального тензора проницаемости Тамма—Мандельштама $\varepsilon_{\mu\nu} = \sqrt{\mu}\,\mathrm{diag}\left(1,1,1,-\frac{1}{\varepsilon\mu}\right)$, рассматриваемого как метрический тензор [4].

Покажем, что возможно обобщение материальных уравнений (2), (3), позволяющее единообразно анализировать свойства симметрии полной системы уравнений относительно пространственно-временных преобразований.

Феноменологически введем материальные уравнения

$$\mathbf{D} + w\left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{H}\right] = \varepsilon\left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B}\right]\right),$$
$$\mathbf{B} + w\left[\mathbf{E}, \frac{\mathbf{u}}{c}\right] = \mu\left(\mathbf{H} + \left[\mathbf{D}, \frac{\mathbf{u}}{c}\right]\right), \tag{4}$$

где w — произвольное фиксированное число. Система уравнений (1), (4), как легко показать, инвариантна относительно следующих преобразований, указанных в [5]:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - x\frac{v}{c^2}w\right), \tag{5}$$

где

$$\gamma=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\,w\right)^{-1/2}.$$

Действительно, определим соотношение между частными производными по x, t и x', t', а также компонентами скоростей в различных системах координат в соответствии с (5). Запишем уравнения (1) в декартовых координатах и проведем их преобразование. Из требования инвариантности уравнений (1) вытекает следующий закон преобразования полевых величин и источников:

$$\begin{gathered}
E_x=E'_x,\ E_y=\gamma\left(E'_y+\frac{v}{c}B'_z\right),\ E_z=\gamma\left(E'_z-\frac{v}{c}B'_y\right),\\
B_x=B'_x,\ B_y=\gamma\left(B'_y-\frac{v}{c}wE'_z\right),\ B_z=\gamma\left(B'_z+\frac{v}{c}wE'_y\right),\\
H_x=H'_x,\ H_y=\gamma\left(H'_y-\frac{v}{c}D'_z\right),\ H_z=\gamma\left(H'_z+\frac{v}{c}D'_y\right),\\
D_x=D'_x,\ D_y=\gamma\left(D'_y+\frac{v}{c}\,wH'_z\right),\ D_z=\gamma\left(D'_z-\frac{v}{c}\,wH'_y\right),\\
\rho=\rho'\gamma\left(1+\tilde{u}'_x\frac{v}{c^2}\,w\right).
\end{gathered}\tag{6}$$

Подставляя (6) в (4), убеждаемся в инвариантности материальных уравнений.

Аналогичные результаты для произвольного значения $w\neq0$ могут быть получены другим, более удобным способом. Перепишем уравнения (1) в виде

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=-\frac{\sqrt{w}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{B}}{\sqrt{w}}\right),\ \mathrm{rot}\,\mathbf{H}=\frac{\sqrt{w}}{c}\frac{\rho}{\sqrt{w}}\,\tilde{\mathbf{u}}+\frac{\sqrt{w}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{D}}{\sqrt{w}}\right),$$

$$\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{B}}{\sqrt{w}}\right)=0,\ \mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{D}}{\sqrt{w}}\right)=\frac{\rho}{\sqrt{w}}.$$

Они изоморфны уравнениям Максвелла (1) при следующей замене величин:

$$\tilde{c}=\frac{c}{\sqrt{w}},\ \tilde{\mathbf{H}}=\mathbf{H},\ \tilde{\mathbf{B}}=\frac{\mathbf{B}}{\sqrt{w}},\ \tilde{\mathbf{D}}=\frac{\mathbf{D}}{\sqrt{w}},\ \tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{E}\tag{7}$$

и поэтому инвариантны относительно преобразований (5). Полная система уравнений, инвариантная относительно (5), по аналогии с (2) имеет вид

$$\begin{gathered}
\tilde{\mathbf{D}}+\left[\frac{\mathbf{u}}{\tilde{c}},\tilde{\mathbf{H}}\right]=\tilde{\varepsilon}\left(\tilde{\mathbf{E}}+\left[\frac{\mathbf{u}}{\tilde{c}},\tilde{\mathbf{B}}\right]\right),\\
\tilde{\mathbf{B}}+\left[\tilde{\mathbf{E}},\frac{\mathbf{u}}{\tilde{c}}\right]=\tilde{\mu}\left(\tilde{\mathbf{H}}+\left[\tilde{\mathbf{D}},\frac{\mathbf{u}}{\tilde{c}}\right]\right).
\end{gathered}\tag{8}$$

При $u=0$ из (8) должны следовать (3), поэтому $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon/\sqrt{w}$, $\tilde{\mu}=\mu/\sqrt{w}$. Подставляя (7) в (8), придем к (4). Закон связи величин получается из лоренцовского после замены согласно (7).

Выражение штрихованных величин через нештрихованные отличается от (6) заменой штрихов и знаком перед скоростью v. Уравнения (4) могут быть записаны в виде

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{w-\varepsilon\mu}{1-\frac{u^2}{c^2}w}\left\{w\frac{u^2}{c^2}\mathbf{H}+\left[\mathbf{D},\ \frac{\mathbf{u}}{c}\right]-w\frac{\mathbf{u}}{c^2}(\mathbf{Hu})\right\},$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}-\frac{1}{\mu}\frac{w-\varepsilon\mu}{1-\frac{u^2}{c^2}w}\left\{w\frac{u^2}{c^2}\mathbf{E}+\left[\frac{\mathbf{u}}{c},\ \mathbf{B}\right]-w\frac{\mathbf{u}}{c^2}(\mathbf{Eu})\right\}. \qquad (9)$$

Полагая в (4) $w=1$, получаем систему (2); при $w=\varepsilon\mu$, как непосредственно видно из (9),— уравнения (3). При этом формулы (5), (6) задают преобразование величин, входящих в исследуемые уравнения, относительно групп L_c и $L_{\tilde{c}}$ соответственно. Отметим, что система (4) имеет лоренц-инвариантный вакуумный предел (ε, $\mu\to1$) только в указанных двух случаях.

Если считать параметр w произвольным, то полученные уравнения являются некоторым гипотетическим обобщением электродинамики. В частности, при $w=0$ получаем систему уравнений, инвариантную относительно преобразований Галилея.

Summary

The one-parametric generalization of the material equations is used to analyze the symmetry properties of the equations of macroscopic electrodynamics with respect to the space-time transformations. In a general case the transformation formulae are suggested for the field quantities and sources.

Литература

1. Лоренц Г. А. Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света.— В сб.: Принцип относительности. М.: ОНТИ, 1935, с. 67—87.
2. Эйнштейн А. Собр. научн. тр.— М.: Наука, 1965, т. 1, с. 7—35.
3. Rosen H. Special Theories of Relativity.— Amer. J. Phys., 1952, vol. 20, p. 161—164.
4. Воронцов В. И. Тезисы докладов Всесоюзной геометрической конференции.— Вильнюс, 1975.—125 с.
5. Паули В. Теория относительности.— М.: Гостехиздат, 1947.— 300 с.

Институт тепло- и массообмена АН БССР,

Институт физики АН БССР

Поступила в редакцию 28.04.81

УДК 530.12:145

Л. И. КОМАРОВ, Т. С. РОМАНОВА

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ

Динамическая симметрия квантовомеханической задачи в водородоподобном атоме впервые была обнаружена В. А. Фоком [1] и с тех пор с различных точек зрения обсуждалась (см. [2] и приведенную там литературу). Ниже предлагается представляющийся нам простым и эффективным в приложениях вариант реализации этой симметрии, основанный на связи уравнения Шредингера для изотропного осциллятора в двумерном комплексном пространстве с уравнением Шредингера для одноэлектронного атома [3].